M 8.2 Stochastik: Laplace-Experimente

In diesem Lehrplanabschnitt ist erstmals explizit die Beschäftigung mit Wahrscheinlichkeiten gefordert. Dabei wird – wie in der gesamten Mittelstufe – ein „intuitiver Wahrscheinlichkeitsbegriff“ zugrunde gelegt, der durch die Bedingungen des betrachteten Zufallsexperiments naheliegt. Eine exakte, formale Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs erfolgt erst in Jahrgangsstufe 11.

Das zum Ermitteln von Laplace-Wahrscheinlichkeiten erforderliche Abzählen der Mächtigkeiten von Ereignissen und Ergebnisräumen knüpft an den Lehrplaninhalt „Erstes Anwenden des Zählprinzips, Veranschaulichen in Baumdiagrammen“ von Jahrgangsstufe 5 an. Der zunehmenden Routine und der altersbedingten Weiterentwicklung des analytischen Denkens entsprechend fallen die Zählprobleme jedoch nun anspruchsvoller aus. Der Lehrplan weist allerdings ausdrücklich darauf hin, dass die Aufgaben **mit Hilfe von Baumdiagrammen bzw. durch geschicktes Abzählen** lösbar sein sollen. **An ein unreflektiertes, bloßes Vorziehen ehemaliger Inhalte aus der Oberstufe ist hier keinesfalls gedacht. Kombinatorik im Sinne von – über das Zählprinzip hinausgehenden – kombinatorischen Grundformeln, wie sie z. B. die Formelsammlung bietet, ist nicht intendiert.** Ein systematisches Eingehen auf mehrstufige Zufallsexperimente, insbesondere die Formulierung der Pfadregeln und deren Anwendung zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten, sieht der Lehrplan erst in Kapitel „M 9.4 „Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente“ in Jahrgangsstufe 9 vor.

Der im Lehrplan geforderte Ausblick auf Zufallsexperimente, die nicht der Laplace-Annahme genügen (z. B. Werfen eines Reißnagels), soll bei den Schülern die Einsicht wecken, dass sich die Laplace-Wahrscheinlichkeit nicht zu einer allgemeinen Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffes eignet; keinesfalls ist dabei jedoch an eine weitergehende, axiomatische Behandlung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gedacht.

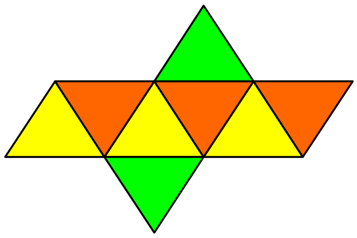
Um – wie im Lehrplan gefordert – den Themenbereich unter Verwendung der mathematischen Fachsprache zu bearbeiten, müssen die Begriffe *Ergebnis*, *Ergebnisraum* und *Ereignis* sowie die in diesem Zusammenhang gebräuchlichen Kurzschreibweisen eingeführt werden. Spätestens hier kommen die Schüler mit der Mengenschreibweise (z. B. für Ergebnisraum, Ereignis und Gegenereignis) in Berührung. Die Behandlung dieser formalen Aspekte sollte auf den für die konkreten Problemstellungen erforderlichen Umfang beschränkt bleiben und keinesfalls in eine abstrakte Ereignisalgebra münden. Die formale Behandlung von Schnitt-, Vereinigungs- und Komplementmenge wird vom Lehrplan in Jahrgangsstufe 11 im Kapitel „M 11.6 Wahrscheinlichkeitsbegriff“ gefordert. Ein Wiederaufgreifen der Mengenschreibweise erfolgt bereits in Kapitel „M 8.3 Funktionale Zusammenhänge: elementare gebrochen-rationale Funktionen“ im Zusammenhang mit der Definitions- und Wertemenge von gebrochen-rationalen Funktionen bzw. der Definitions- und Lösungsmenge von Bruchgleichungen.

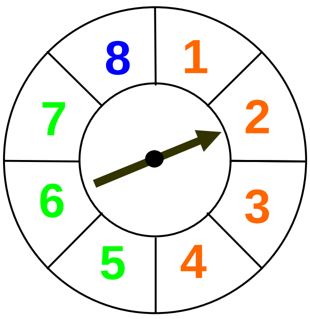
Beispielaufgaben

Die folgenden Aufgaben weisen ein Niveau auf, das erreicht und gehalten werden soll. Unter dem Aspekt der Differenzierung werden weitere Aufgaben, die von diesem Niveau abweichen, von den Schülern bearbeitet werden. Aufgabe 7 f grenzt das bei der Bearbeitung von Zählproblemen anzustrebende Niveau nach oben ab.

1. In den Spielregeln für ein Würfelspiel steht: „Man werfe beide Würfel und bilde aus den beiden oben liegenden Augenzahlen die größtmögliche Zahl.“ (Beispiel: Bei den Augenzahlen „2“ und „4“ ist das die Zahl „42“.)
   a) Gib einen Ergebnisraum für dieses Spiel an.
   b) Gib folgende Ereignisse in Mengenschreibweise an:
      A: Die gebildete Zahl besteht aus zwei gleichen Ziffern.
      B: Die Zahl enthält mindestens eine 4.
      C: Die Einerziffer ist halb so groß wie die Zehnerziffer.
      D: Die Zahl ist größer als 10.
      E: Die Quersumme der Zahl ist 6.
      F: Die Zahl ist eine Primzahl.
   c) Beschreibe folgende Ereignisse in Worten:
      G = {11; 21; 22}
      H = {22; 42; 44; 62; 64; 66}

2. Gib für folgende Zufallsexperimente jeweils einen Ergebnisraum an und entscheide, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt:
   a) Ein aus dem abgebildeten Netz gebastelter „Würfel“ wird geworfen und die oben liegende Farbe wird notiert.





   b) Das abgebildete Glücksrad wird gedreht und die angezeigte Zahl wird betrachtet.
   c) Das abgebildete Glücksrad wird gedreht und die angezeigte Farbe wird betrachtet.
   d) Aus einer Tüte mit 13 roten, 9 grünen, 12 gelben und 21 weißen Gummibärchen wird zufällig ein Gummibärchen ausgewählt.

[Kommentar: An dieser Aufgabe lässt sich thematisieren, dass es von der Konstruktion des Ergebnisraumes abhängen kann, ob ein Zufallsexperiment die Laplace-Bedingung erfüllt (vgl. auch Aufgabe 4).]

3. a) Beschreibe zwei Laplace-Experimente, deren Ergebnisraum je 3 Elemente besitzt.

   b) Beschreibe ein Zufallsexperiment, das kein Laplace-Experiment ist.

4. Gib für die folgenden Zufallsexperimente jeweils einen Ergebnisraum an und berechne die Wahrscheinlichkeiten der angegebenen Ereignisse:

   a) Aus dem Wort „ZUFALLSEXPERIMENT“ wird zufällig ein Buchstabe ausgewählt.
   A: Es handelt sich um ein „E“.
   B: Es handelt sich um einen Konsonanten.
   C: Es handelt sich um einen Vokal.

   b) Eine Lostrommel enthält 600 Lose. Zwei Drittel davon sind Nieten, 80 % des Restes ergeben Trostpreise, die übrigen Lose ergeben Hauptgewinne.
   A: Das gezogene Los ergibt einen Trostpreis.
   B: Das gezogene Los ergibt keinen Hauptgewinn.

   [Kommentar: Bei der Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten legt man in der Regel intuitiv die Laplace-Annahme zugrunde. Erfahrungsgemäß werden jedoch die angegebenen Ergebnisräume dieser Annahme nicht gerecht. Ergebnisräume, die die Verwendung der Laplace-Annahme rechtfertigen, beruhen z. B. auf der Vorstellung durchnummerierter Buchstaben oder Lose.]

5. Beim Mensch-ärgere-dich-nicht- Spiel ist als nächstes Grün an der Reihe.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Grün nach dem nächsten Wurf eine Spielfigur ins Ziel fahren kann, wenn dort eigene Figuren übersprungen werden dürfen?

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Grün eine andere Spielfigur schlagen kann?

6. In einer Urne befinden sich eine weiße, eine schwarze, eine rote und eine blaue Kugel. Es werden nacheinander (und ohne Zurücklegen) zwei Kugeln entnommen.

   a) Zeichne ein Baumdiagramm und lies den Ergebnisraum dieses Zufallsexperiments ab.

   b) Ermittle die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   A: Keine der gezogenen Kugeln ist rot.
   B: Unter den gezogenen Kugeln ist eine rote.
   C: Es werden zwei rote Kugeln gezogen.
   D: Die gezogenen Kugeln sind weiß und schwarz.

   c) Gib in Worten ein Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit P(E) = 25 % und ein Ereignis F mit der Wahrscheinlichkeit P(F) = $\frac{1}{3}$ an.

7. Es soll zufällig eine vierstellige Zahl aus den Ziffern 1, 2, 3 und 4 gebildet werden bei der jede dieser Ziffern nur einmal vorkommt.

   a) Beschreibe den Ablauf eines geeigneten Zufallsexperiments.

   b) Wie viele verschiedene Ergebnisse sind möglich?

   c) Ermittle die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
      – Die Zahl enthält eine 2.
      – Die gebildete Zahl endet auf 2.
      – Die gebildete Zahl ist gerade.
      – Die gebildete Zahl ist größer als 1300.
        [Kommentar: Hier bietet sich eine Lösung über das Gegenereignis an.]

   Nun soll zufällig eine vierstellige Zahl aus den Ziffern 1, 2, 3 und 4 gebildet werden, bei der jede der Ziffern mehrmals vorkommen darf.

   d) Beschreibe wieder den Ablauf eines geeigneten Zufallsexperiments.

   e) Wie viele Ergebnisse sind nun möglich?

   f) Ermittle die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
      – Die Zahl enthält mindestens eine 2.
        [Hier bietet sich eine Lösung über das Gegenereignis an.]
      – Die gebildete Zahl endet auf 2.
      – Die gebildete Zahl ist gerade.
      – Die gebildete Zahl ist größer als 1300.
        [Hier bietet sich eine Lösung über das Gegenereignis an.]